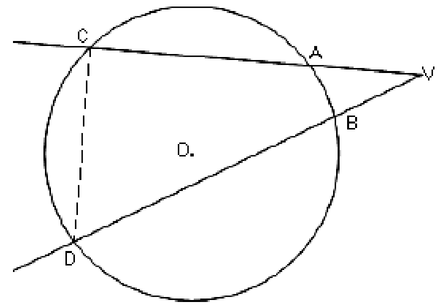
Assunto: Mega-ficha de Preparação para o Exame Nacional IV – Problemas do Projecto 1000 Itens

1. Ângulo externo

O ângulo **CVD é um ângulo externo** à circunferência, porque o seu vértice é um ponto exterior à circunferência e os seus lados são semi-rectas secantes à circunferência.

a. Explica por que é verdadeira a seguinte igualdade:

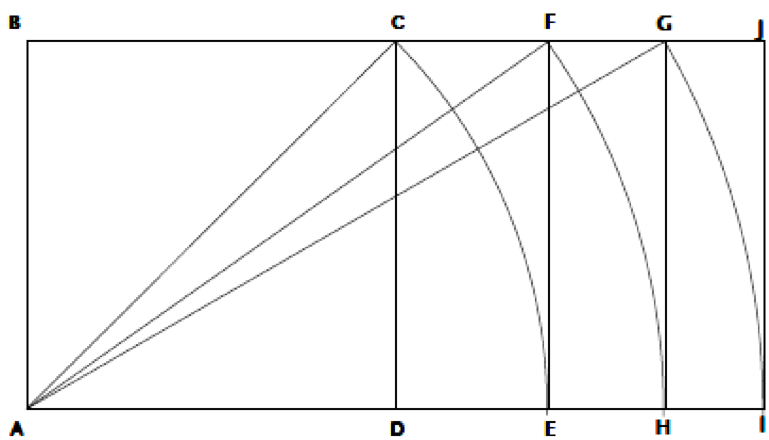
$$A\hat{C}D = \frac{\text{amplitude do arco AB} + \text{amplitude do arco BD}}{2}.$$



b. Prova que a amplitude do ângulo V é dada pela seguinte expressão: $\hat{V} = \frac{\text{amplitude do arco CD} - \text{amplitude do arco AB}}{2}$

2. Sequência de rectângulos

ABCD é um quadrado cujo lado mede uma unidade;
CE, FH e GI são arcos de circunferência de centro em A;
ABFE, ABGH e ABJI são rectângulos.

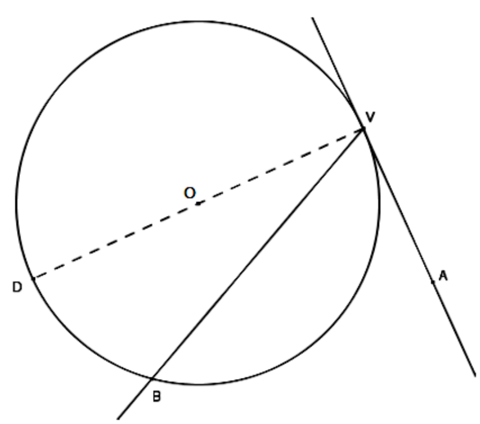


a. A Rita observou os rectângulos da figura e exclamou: **"A medida da área de cada um dos rectângulos é representada pelo mesmo número que a medida do seu comprimento."** Explica por que é verdadeira esta afirmação da Rita.

b. Qual é a área de cada um dos rectângulos ABFE, ABGH e ABJI? **Apresenta os cálculos que efectuares**.

3. Ângulos semi-inscritos

Na figura, ao ângulo AVB chama-se ângulo semi-inscrito na circunferência (ou ângulo de um segmento), porque tem o vértice na circunferência, um dos lados [VA] é tangente e o outro [VB] é secante à circunferência.



a. Se a amplitude do arco VB for **110º**, qual é a amplitude do ângulo BVD?
b. Explica por que é que o triângulo [VOB] é isósceles.

c. Mostra que a amplitude de qualquer ângulo semi-inscrito é igual a metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados.

Sugestão: **Começa por desenhar numa circunferência um ângulo semi – inscrito. Desenha o diâmetro da circunferência que contém o vértice do ângulo. Identifica os extremos do diâmetro e o ângulo por letras.**

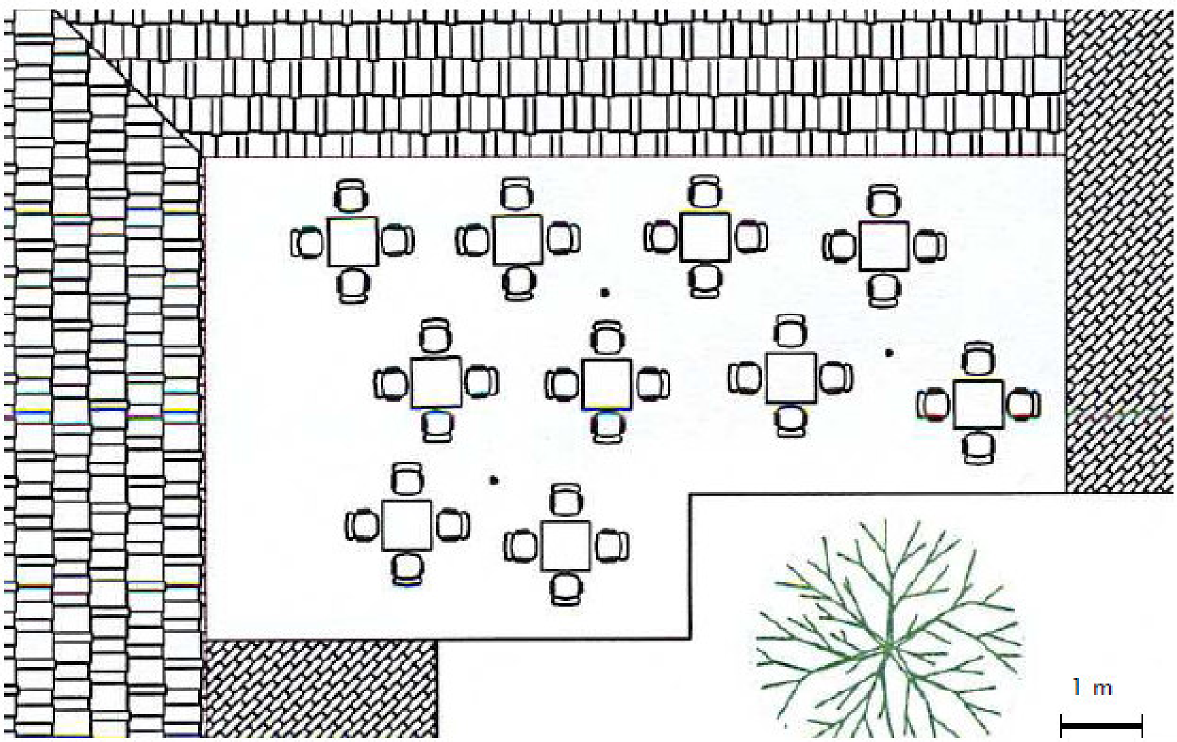
4. Climatização de uma esplanada


Figura 1

Com a aproximação do Inverno, o Sr. Pereira decidiu climatizar a esplanada do seu restaurante. Após alguma pesquisa, optou por instalar aquecedores exteriores (Figura 1), com as características abaixo indicadas.

Capacidade de climatização para cerca de 20 m².   Consumo de gás propano entre os 360 e os 870 g/h (gramas por hora)

a. Assumindo que a distribuição de calor é uniforme em torno do aquecedor, **utiliza material de desenho e medida** para assinalar a zona ou zonas da esplanada que beneficiam do calor dos aquecedores nos locais assinalados com um ponto (**.**).



b. O Sr. Pereira irá utilizar garrafas de gás propano com **11 kg**. Entre que valores varia o tempo de autonomia de cada aquecedor?

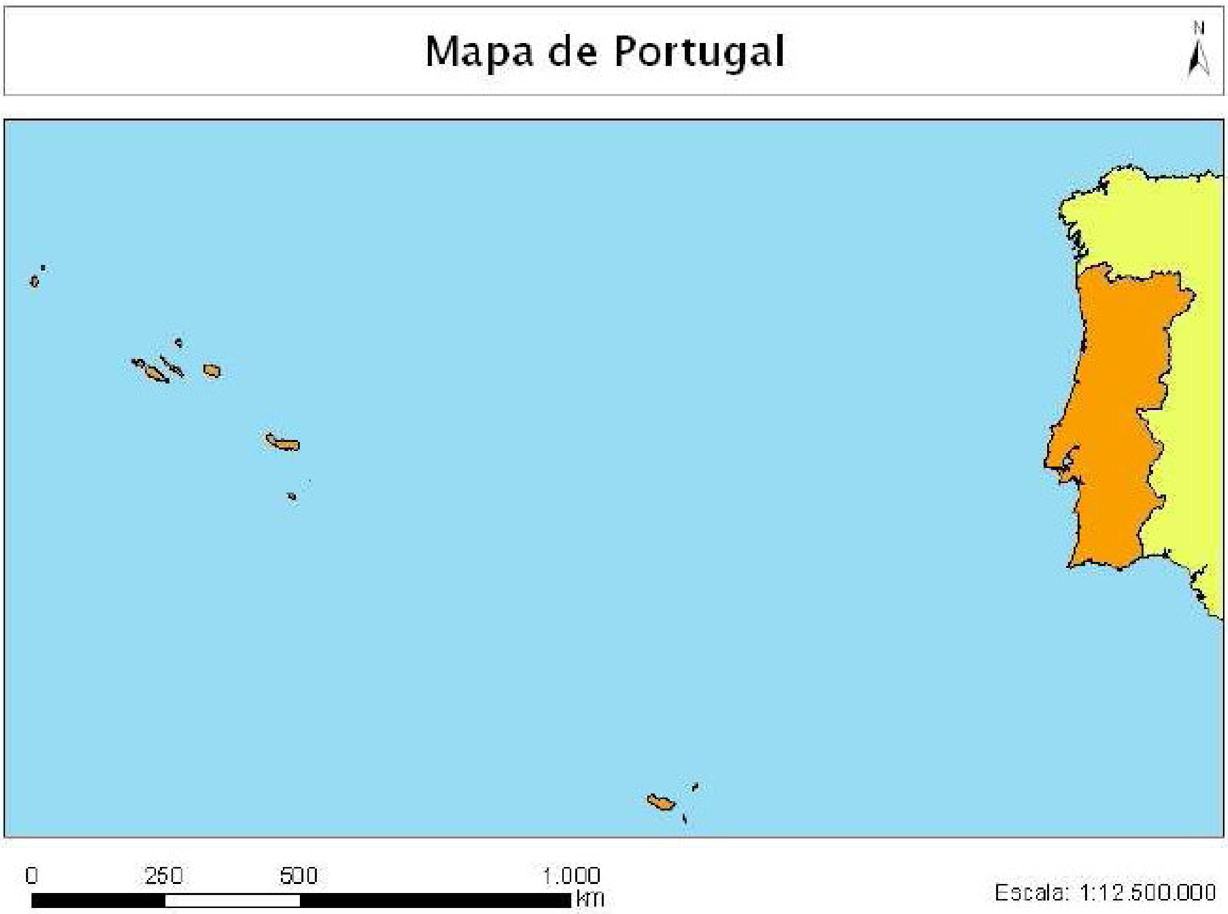
5. Planificação de uma embalagem

A Inês recebeu de oferta uma embalagem de chocolates como a da figura - "meio cilindro".
Como gostou da embalagem, decidiu construir uma igual.

Apresenta uma planificação da embalagem reduzida - razão $\frac{1}{3}$.
Sempre que necessário, utiliza os valores arredondados às décimas.

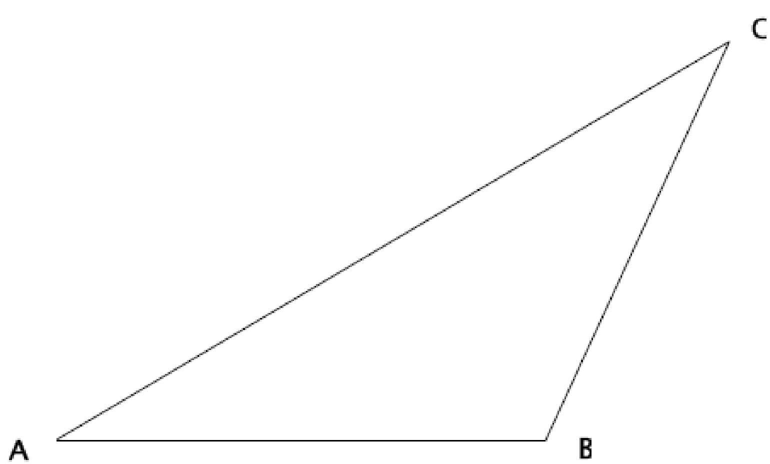
6. Terramoto de Lisboa

O terramoto que ocorreu em Lisboa no dia 1 de Novembro de 1755, cerca das 9:20h da manhã, destruiu grande parte da cidade e causou muitos estragos no litoral algarvio.
Os geólogos estimam que o sismo atingiu o grau 9 na escala de Richter. O epicentro não é conhecido com exactidão, mas pensa-se que foi no mar, a **sudoeste de Lisboa e distante da cidade entre 150 e 500 quilómetros.**
No mapa seguinte, **assinala todos os pontos onde pode ter ocorrido o epicentro do terramoto**.



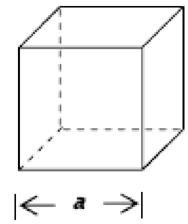
7. Um rectângulo

Utilizando material de desenho, **constrói um rectângulo cuja área seja igual à área do triângulo [ABC] em que um dos seus lados seja [AB].** **Justifica a tua construção.**



8. Cubo

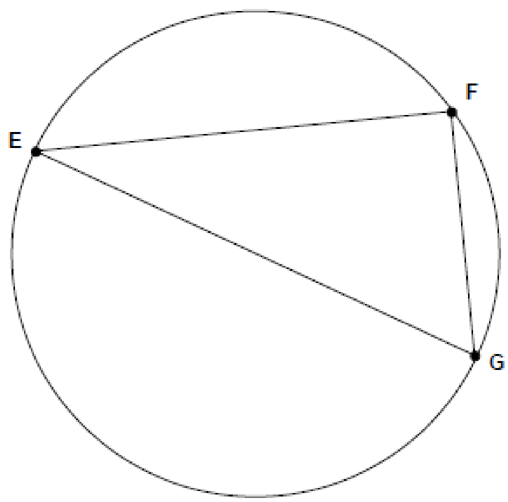
Considera um cubo cuja aresta mede a .



Explica as tuas respostas ou apresenta os cálculos que efectuares.

a. Para que valor de a é que a soma da medida do comprimento de todas as arestas é igual à medida da área total do cubo?
b. Para que valor de a é que a medida da área total do cubo é igual à medida do seu volume?

9. O centro da circunferência



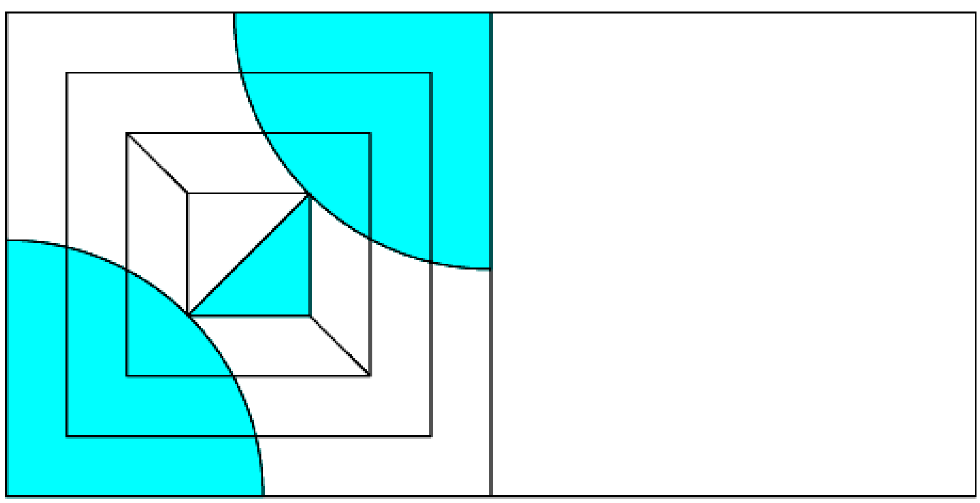
O **ângulo EFG é um ângulo recto**, inscrito na circunferência da figura.

Determina, geometricamente, o centro da circunferência.
Explica o processo que utilizares, justificando cada um dos passos seguidos.

Nota: Esse processo não deve envolver a medição de segmentos.

10. Azulejos simétricos

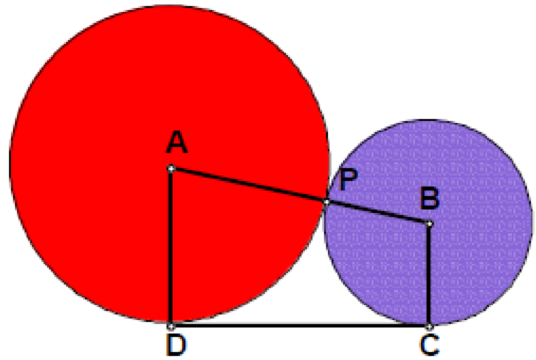
Na figura, é possível observar um azulejo construído pela Sara, na disciplina de Educação Tecnológica. A Sara pretende juntar-lhe um segundo azulejo.



Representa na figura, utilizando instrumentos de desenho, o segundo azulejo da Sara, de modo que entre os dois exista um eixo de simetria.

11. Círculos tangentes

O problema seguinte foi adaptado de um dos problemas contidos numa tábua datada de 1892 e encontrada na localidade de Miyagi.



Os círculos **têm um único ponto em comum (P)** e **[CD] é tangente** a ambos os círculos.

O **raio** do círculo de **centro em A** mede **3 cm** e o raio do círculo de **centro em B** mede **2 cm**.

Determina o valor exacto da medida do comprimento de [CD].

12. Ângulo de Mach

A uma determinada altitude e temperatura, a velocidade Mach (M) de um avião é a razão entre a sua velocidade (v) e a velocidade do som (v_{som}).

Quando um avião se desloca a uma velocidade superior à do som, a onda de choque que o seu movimento provoca toma a forma de um cone (cone de Mach). Ao ângulo formado pela geratriz do cone e pela direcção do avião chama-se ângulo de Mach (a). A figura 2 mostra o esquema do cone de Mach provocado por um avião F15.

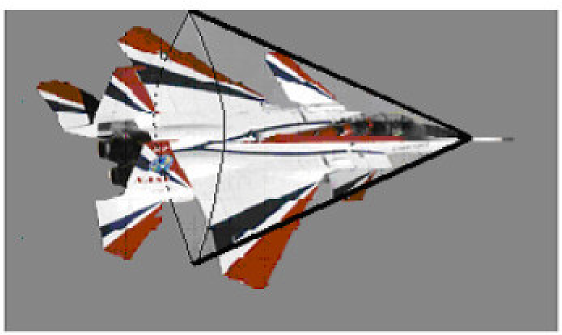


Figura 1

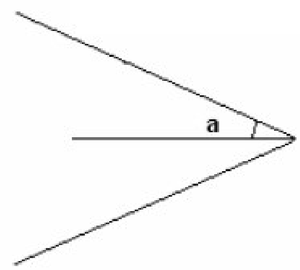


Figura 2- Perfil do cone de Mach

A relação entre o ângulo de Mach (a) e a velocidade Mach (M) é dada pela seguinte expressão: $sen(a)=\frac{1}{M}$.

Para responderes às questões seguintes, tem em conta a relação anterior.

a. **Calcula o ângulo de Mach**, quando um avião atinge uma velocidade Mach de **2**.

b. Se a velocidade Mach aumentar, **o ângulo de Mach aumenta, diminui ou mantém-se?** **Explica a tua resposta.**

c. Na **figura 3**, vê-se o cone formado por um avião quando este ultrapassa a barreira do som. Recorrendo a material de medida, **determina, aproximadamente, a velocidade Mach do avião.**

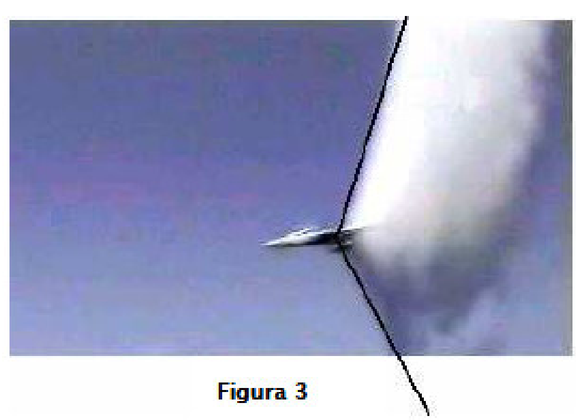


Figura 3

Nota:
A designação Mach deve-se ao físico austríaco, do séc. XIX, Ernst Mach, que estudou óptica, mecânica e dinâmica de fluidos.

13. Perímetro de uma sequência de hexágonos

A Joana e a Cristina começaram a construir uma sequência geométrica com hexágonos regulares e iguais, como mostram as figuras.

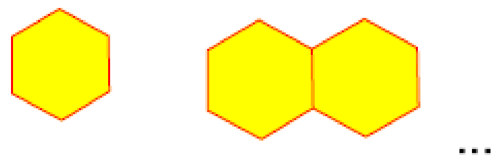


Figura 1 Figura 2

a. As duas amigas não estão de acordo quanto à medida do perímetro das figuras anteriores.

- **A Joana afirma** que, se a unidade de medida for o comprimento do lado de um hexágono, o perímetro da figura 1 é 6 e o perímetro da figura 2 é 12, que calcula da seguinte forma: 6x2.

- **A Cristina discorda da Joana e afirma** que o perímetro da figura 2 é 10, e calcula-o da seguinte forma: 4x2+2.

Diz qual delas tem razão e explica o erro que a outra cometeu.

b. Para construir a figura 3, juntaram um terceiro hexágono à figura 2, ficando um só lado em comum com um hexágono da figura 2.

b.1. Qual é o perímetro da figura 3?

b.2. Se as duas amigas mantiverem este processo nas figuras seguintes, qual será o perímetro da figura 200?

b.3. Escreve uma fórmula que relacione o número da figura (n) com o seu perímetro (P).

14. As minha equações de 2º grau

Escreve uma equação do 2.º grau que satisfaça cada uma das seguintes condições e apresenta as suas soluções:

a. **Equação com duas soluções**: o zero e um número negativo;

b. **Equação com duas soluções**: dois números positivos;

c. **Equação com apenas uma solução**;

d. **Equação sem soluções**.

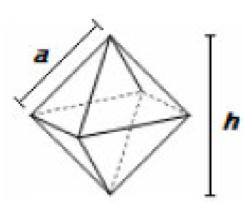
Em cada caso explica como pensaste.

15. Octaedro

O octaedro é um poliedro com oito faces. Na figura está representado um octaedro regular.

a. Calcula o volume de um octaedro regular com 5 cm de aresta (a).

b. Qual das seguintes fórmulas permite calcular o volume de um octaedro regular conhecendo a medida da sua altura (h) e a medida da aresta (a)?



Octaedro

(A) $V = a^2 \times h$ **(B)** $V = \frac{a^2 \times h}{3}$

(C) $V = 2\,\frac{a^2 \times h}{3}$ **(D)** $V = 2(a^2 \times h)$

16. Step

O Rui pesava **80 kg**, quando se inscreveu no ginásio " Perca Peso". O seu plano de treinos incluía uma sequência de *steps* (degraus) de 30 ciclos por minuto. A altura máxima entre os degraus é **15 cm**.

O Rui quis saber quantas calorias gasta, ao fazer a sequência de *steps* durante 30 minutos. Falou com o treinador e ficou a saber que o gasto de calorias está relacionado com a quantidade máxima de oxigénio consumido. Cada litro de oxigénio consumido corresponde a um gasto de **5000 calorias**.
A quantidade de oxigénio consumido é dado pela relação:

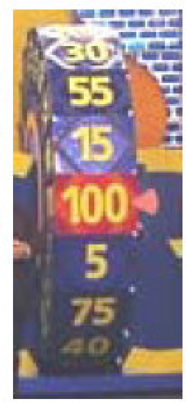
$$q_{O_2} = c\,(0{,}2 + 2{,}394\,h) + 3{,}5$$

q_{O_2} – quantidade máxima de oxigénio (O_2) consumido, em ml/minuto;
c – número de ciclos por minuto;
h – altura entre os degraus do aparelho, em metros.

a. Verifica que o Rui gasta, aproximadamente, **3041 calorias** em **30 minutos**.

b. Durante quanto tempo deve o Rui fazer a sequência de *steps*, para gastar, aproximadamente, **5000 calorias?**

17. Roda gigante



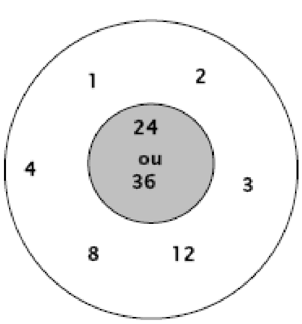
Num concurso há três concorrentes. Na sua vez de jogar cada concorrente faz girar uma roda gigante que está dividida em vinte casas. Cada uma das casas contém **um múltiplo de 5 menor ou igual a 100** (excepto o zero).
O concorrente que obtiver 100 pontos ou a pontuação mais próxima de 100 ganha o jogo.

Cada número da roda gigante tem igual probabilidade de sair.

a. Qual é a probabilidade de um concorrente girar a roda e lhe sair o número **100**?

b. Na sua vez, cada concorrente pode girar duas vezes seguidas a roda e os números que obtém adicionam-se. Se a soma dos números ultrapassar 100, o concorrente perde.
b.1. O Rui fez girar a roda e obteve **25 pontos**. Decidiu voltar a girar a roda. Qual é a probabilidade de o Rui ultrapassar os 100 pontos?

b.2. Numa sessão do concurso, o primeiro jogador ficou com **80 pontos**. A Teresa fez girar a roda e obteve **45 pontos**.
Qual é a probabilidade de a Teresa obter uma pontuação maior do que a do primeiro concorrente ao fazer girar a roda pela segunda vez?

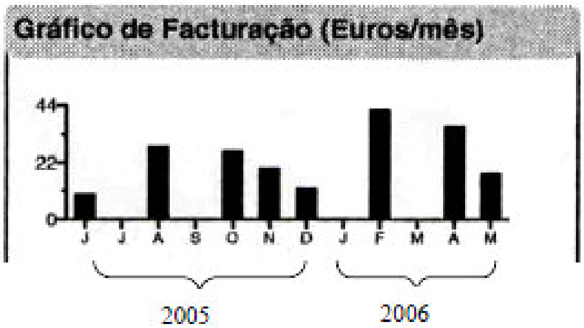


18. Probabilidades no alvo

Se escolher, ao acaso, três números diferentes da zona branca do alvo, o que é mais provável: o seu produto ser 24 ou ser 36?
Justifica a tua resposta.

20. Gráfico de facturação

Na seguinte figura, pode observar-se o gráfico que acompanhava uma das facturas do Sr. Silva, referente aos seus gastos energéticos durante um ano. A facturação ocorreu nos meses de Junho, Agosto, Outubro, Novembro e Dezembro de 2005 e nos meses de Fevereiro, Abril e Maio de 2006.



a. Sem fazeres qualquer cálculo, **explica porque são verdadeiras as seguintes afirmações:**

a.1 **O gasto médio mensal foi inferior a 44 euros.**

a.2 **No último trimestre de 2005, o gasto médio mensal foi superior a 11 euros.**

b. **Qual foi, aproximadamente, o gasto médio diário no ano correspondente aos dados do gráfico (Junho de 2005 a Maio de 2006)? Apresenta os cálculos que efectuares.**

21. Pastilhas às cores

O Sr. Tomás acabou de encher as três máquinas de pastilhas da sua loja. Em cada máquina, colocou igual número de pastilhas de cada cor e misturou–as bem.

Na **máquina A**, colocou pastilhas pequenas das cores seguintes: azuis, amarelas, encarnadas, cor-de-laranja, verdes e brancas.

Na **máquina B**, colocou pastilhas grandes das cores seguintes: azuis, amarelas, encarnadas, cor-de-laranja, verdes e cor-de-rosa.

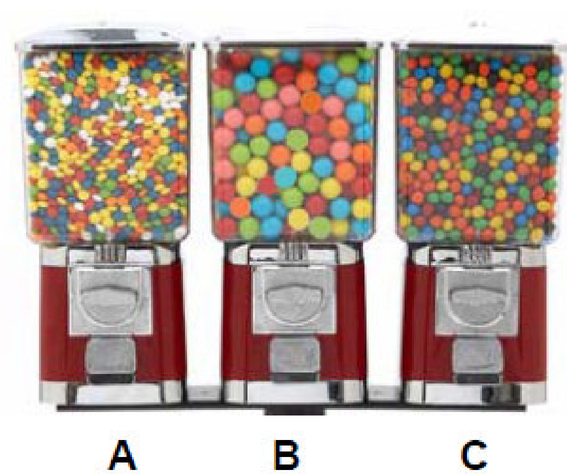
Na **máquina C**, colocou pastilhas médias das cores seguintes: azuis, amarelas, encarnadas, cor-de-laranja, verdes e roxas.

a. **Em que máquinas é impossível** sair uma pastilha cor-de-rosa?

b. O Sr. Tomás pensa que na **máquina A há maior probabilidade** de sair uma pastilha amarela do que nas outras máquinas. **O Sr. Tomás terá razão? Explica a tua resposta.**

c. O Sr. Tomás colocou **250 pastilhas cor-de-laranja na máquina C**. **No total, quantas pastilhas foram colocadas nesta máquina?**

Nota: **A imagem a cores pode ser importante para se perceber a observação do Sr. Tomás.**



Bom trabalho!
A equipa do PM